Analiza Matematyczna M3, Wydział Matematyki, lista 3

Zadanie 1. Niech $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$. Oblicz całki

a) $\int_K (x_1 + x_2 + ... + x_n)\, dX$, b) $\int_K (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)\, dX$, c) $\int_K (x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)\, dX$.

Zadanie 2. Dla ciągłej (a zatem całkowalnej) funkcji f zamień kolejność całkowania:

a) $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dx$, b) $\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\, dy$, c) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{|x|} f(x,y)\, dx$.

d) $\int_1^e dy \int_{\ln \frac{1}{y}}^{\ln y} f(x,y)\, dx$, e) $\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y^3} f(x,y)\, dx$, f) $\int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dx$.

Narysuj obszary całkowania.

Zadanie 3. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

a) $\iint_D x^2 y\, dx\, dy$, $D\colon y = -2,\ y = 1/x,\ y = -\sqrt{-x}$, b) $\iint_D e^{x^2}\, dx\, dy$, $D\colon y = 0,\ y = 2x,\ x = \sqrt{\ln 3}$,

c) $\iint_D |x - y|\, dx\, dy$, $D\colon x = 0,\ y = 0,\ y = 3 - 2x$, d) $\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\, dx\, dy$, $D\colon x^2 + y^2 = 4$.

Zadanie 4. Krzywa $x = 3\sqrt{y}$ rozcina koło $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ na dwie części. Korzystając z całek podwójnych oblicz ich pola.

Zadanie 5. Stosując odpowiednią zamianę zmiennych, oblicz pole obszaru:
a) $S = \{(x,y) \,:\, (x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^2 - y^2)\}$,
b) $P = \{(x,y) \,:\, ax \leqslant y^2 \leqslant bx,\ \alpha y \leqslant y^2 \leqslant \beta y\}$, gdy $0 < a < b$ oraz $0 < \alpha < \beta$.

Zadanie 6. Oblicz objętość bryły, którą z kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ wycina:
a) walec $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 < a < R$,
b) stożek $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 7. Poprzez zamianę na całki iterowane oblicz

a) $\iint_D y(x+y)\, dx\, dy$; b) $\iint_D x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy \quad \left(= \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\right)$,

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$, a $p,\ q \geqslant 1$.

Zadanie 8. Niech D będzie obszarem normalnym, a f funkcją ciągłą na D. Udowodnij, że istnieje punkt $p \in D$ taki, że

$$f(p) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\, dx\, dy,$$

gdzie D jest polem obszaru D.

Zadanie 9. Wyznacz masę i środek ciężkości obszaru
(a) ograniczonego osią Ox i wykresem funkcji kosinus na przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$, jeśli gęstość masy jest równa $\sigma(x,y) = y$;
(b) wyciętego z koła $x^2 + y^2 \leqslant 1$ parabolą $3x - 2y^2 = 0$, jesli $\sigma(x,y) = 1$.